Hinreichende Bedingungen bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen.

Auszug aus einer Schrift

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

bei der

Philosophischen Fakultät

der

Universität zu Breslau

BIBLIOTHEEK RIJKS UNIV. LEIDEN

vorgelegt von

Gertrud Weyl.

Promotion: Mittwoch, den 2. März 1921, vormittags 11 Uhr
in der Aula Leopoldina.

Vortrag: Johann Bernoulli und die Variationsrechnung.

Breslau 1921
Druck von Graß, Barth & Comp. (W. Friedrich).

Referent:
Geheimrat Professor Dr. Kneser.

Rigorosum 1. Dezember 1920.

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

In der Bezeichnung von Knesers Lehrbuch der Variationsrechnung verlangt die isoperimetrische Aufgabe, in der x, y-Ebene eine Kurve mit gegebenen oder irgendwie beschränkten Endpunkten zu finden, die dem Integral

$$J = \int F\ (x, y;\ x', y')\ dt$$

einen extremen, dem Integral

$$K = \int G\ (x, y;\ x', y')\ dt$$

einen vorgeschriebenen Wert erteilt.

Eine andere Fassung der Aufgabe ist folgende:

Setzt man die Mongesche Gleichung:

$$-z' + G\ (x, y, x', y') = 0$$

an, so soll unter allen hierdurch gekennzeichneten Kurven im x, y, z-Raume diejenige gefunden werden, die das Integral J zum Extremum macht, bei gegebenen oder irgendwie beschränkten Endwerten der drei Koordinaten. Man kann dann setzen:

$$J = \int \Phi\ (x, y, z;\ x', y', z')\ dt,\quad \Phi = F + \lambda\ (-z' + G)$$

und findet für die gesuchten Kurven, — die Extremalen, — die Gleichung:

$$\Phi_x - \Phi_{x'}{}' = 0$$

nebst zwei andern, in denen x durch y und z ersetzt ist. Variiert man von einer Extremalen aus, deren Endpunkte 0 und 1 sind, so ist

$$\delta J = \Phi_{x'}\ \delta x + \Phi_{y'}\ \delta y + \Phi_{z'}\ \delta z \Big/_0^1.$$

Sei nun der Punkt 1 im x, y, z-Raume gegeben, der Punkt 0 an eine gegebene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ gebunden, auf ihr aber nicht vorgeschrieben; dann ergibt die Extremumsforderung $\delta J = 0$ auf $\mathfrak{M}$ die Gleichung:

$$\Phi_{x'}\ \delta x + \Phi_{y'}\ \delta y + \Phi_{z'}\ \delta z = 0,$$

die Transversalitätsbedingung; diejenigen von $\mathfrak{M}$ ausgehenden Extremalen, die dieser Gleichung genügen, bilden ein Feld, in welchem sich die Weierstraßsche Theorie der hinreichenden Bedingungen des Extremums entfaltet. Schneiden sich zwei benachbarte Extremalen des Feldes, sodaß eine Hülle entsteht, die etwa im Punkte 1 von der Extremalen erreicht wird, so gibt der Bogen 01 im allgemeinen kein Extremum der Größe J, und diese Punkte 1 sind die Brennpunkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, insbesondere, wenn diese in einen Punkt ausartet, die konjugierten Punkte.

Bisher sind nur solche isoperimetrische Aufgaben behandelt, bei denen $\mathfrak{M}$ ein Punkt oder eine Kurve in der x, y-Ebene ist, längs deren z und δz verschwinden, weil $z = K$ von ihr aus gerechnet wird. Man kann diese Felder als konisch und keilförmig bezeichnen. In der vorliegenden Arbeit werden nun auch Fälle behandelt, in denen $\mathfrak{M}$ eine Fläche im x, y, z-Raume ist, die wir als Bodenfläche des Feldes bezeichnen. Zu diesen Feldern gehören auch neue Typen von Extremumsaufgaben, von denen wir eine Anzahl zusammenstellen. Bei ihnen bestimmen wir auch die Brennpunkte der Ausgangsfläche $\mathfrak{M}$, die Singularitäten des Feldes oder die Hüllen der von der Bodenfläche transversal ausstrahlenden Extremalen.

Behandelte Aufgaben:

I. Das isoperimetrische Problem im engeren Sinne.

$$\text{A)}\ J = \int y\,dx;\quad \text{B)}\ J = \tfrac{1}{2}\int (x dy - y dx);$$

in beiden Fällen: $G(x, y; x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

II. Die Kettenlinie:

$$J = \int y \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt;\ G \text{ wie unter I.}$$

I. Gesucht wird eine ebene Kurve durch einen festen Punkt 1 und einen nicht vorgeschriebenen 0; A) sie soll zusammen mit der x-Axe und den Ordinaten ihrer Endpunkte ein möglichst großes Gebiet begrenzen, während ihre Länge 1. fest vorgeschrieben, 2. eine gegebene Funktion des Abstandes des Punktes 0 von der x-Axe, 3. eine lineare Funktion des Abstandes des Punktes 0 von einer gegebenen Geraden ist. B) Die gesuchte Kurve soll mit den nach einem festen Punkte M gezogenen Radienvektoren ihrer Endpunkte einen möglichst großen Sektor einschließen, während ihre Länge 1. fest gegeben, 2. eine vorgeschriebene Funktion des Abstandes des Punktes 0 von M, 3. eine lineare Funktion des Abstandes des Punktes 0 von einer gegebenen Geraden ist.

II. Die Gestalt eines schweren Fadens in einer vertikalen Ebene zu bestimmen, wenn ein Aufhängepunkt 1 gegeben, der andere 0 in der Ebene und auf dem Faden frei wählbar ist und die Länge des Fadenstückes 01 1. eine gegebene Funktion der Lage des Punktes 0, 2. im besonderen eine lineare Funktion seines Abstandes von einer gegebenen Geraden ist.

IA) Mit (1) $\Phi = y x' + \lambda\,(-z' + \sqrt{x'^2 + y'^2})$ ergibt sich als Transversalitätsbedingung im Punkte (x_0, y_0, z_0):

$$(2)\quad \left(y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\delta x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,\delta y - \lambda\,\delta z = 0.$$

Die Extremalen im Raume sind Schraubenlinien auf Rotationszylindern und können mittels des Zentriwinkels t ihres Grundkreises dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} x &= a + (x_0 - a)\cos t + (y_0 - b)\sin t \\ y &= b - (x_0 - a)\sin t + (y_0 - b)\cos t \\ z &= z_0 - \lambda t;\quad \lambda^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2. \end{aligned}$$

1. Wählt man die Ebene $z = 0$ als Bodenfläche, so ergeben sich mittels der Bedingung (2) die Extremalen

$$x = x_0 + y_0 \sin t;\ y = y_0 \cos t;\ z = y_0 t;$$

in der x, y-Ebene sind das Kreise, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, während die Tangente in ihrem Anfangspunkte 0 parallel zu dieser Geraden ist. Im Brennpunkte ist $t' = 160^0\ 20'\ 8''$; $\cos t' + t' \sin t' = 0$. Die Brennfläche ist die Ebene $y + \sin t'.\ z = 0$. Diejenigen Extremalen, die auf der Geraden $x \sin t' + y = c;\ z = 0$ beginnen, haben die gemeinsame Hülle:

$$x \sin t' + y \cos t' = c;\ y + \sin t'.\ z = 0.$$

2. Für die Bodenfläche $z_0 = \varphi(y_0)$ folgt aus der Bedingung (2) für die Extremalen des Feldes:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + y_0 \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi'^2}}(1 - \cos t) + y_0 \sin t \\ y &= y_0 \cos t + y_0 \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi'^2}} \sin t \\ z &= z_0 + y_0 \frac{t}{\sqrt{1-\varphi'^2}}. \end{aligned}$$

Die Brennfläche hat eine ähnliche Gestalt wie die Bodenfläche: $z = \psi(y)$.

3. Die Bodenfläche sei die Ebene $z_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \delta$; die Brennpunkte der Extremalen des Feldes erfüllen eine Ebene, die mit der Bodenfläche die Gerade $y = 0;\ z = \alpha x + \delta$ gemeinsam hat.

I B. Es ist zu setzen

$$(4)\quad \Phi = \tfrac{1}{2}(x y' - y x') + \lambda(-z' + \sqrt{x'^2 + y'^2}).$$

Die Transversalitätsbedingung lautet

$$(5)\ \left(-\tfrac{1}{2} y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\delta x + \left(\tfrac{1}{2} x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\delta y - \lambda\, \delta z /^0 = 0.$$

Die Extremalen sind Schraubenlinien und unterscheiden sich von denen des Falles I A) nur durch den Sinn der Windung:

$$(6)\quad \begin{aligned} x &= a + (x_0 - a)\cos t - (y_0 - b)\sin t, \\ y &= b + (x_0 - a)\sin t + (y_0 - b)\cos t, \\ z &= z_0 - \lambda t;\quad \lambda^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2. \end{aligned}$$

1. Ist die Ebene $z = 0$ Bodenfläche, so ergibt die Bedingung (5) für die Extremalen:

$$x = \tfrac{1}{2} x_0 (1 + \cos t) - \tfrac{1}{2} y_0 \sin t,$$
$$y = \tfrac{1}{2} y_0 (1 + \cos t) + \tfrac{1}{2} x_0 \sin t,$$
$$z = \tfrac{1}{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\, t.$$

In der x, y-Ebene erhält man Kreise durch den Nullpunkt, die im Punkte (x_0, y_0) auf dem zugehörigen Radiusvektor senkrecht stehen. Die Brennpunkte werden für die Werte $t' = \pi$, $t'' = 320^0\, 40'\, 16''$ erreicht. Alle auf demselben Kreise um den Nullpunkt beginnenden Extremalen schneiden sich in einem Punkte der z-Axe für $t = t' = \pi$. Die zum zweiten Werte gehörenden Brennpunkte liegen auf einem Rotationskegel. Die Extremalen, die auf einer unter dem Winkel $70^0\, 20'\, 8''$ gegen die Radienvektoren geneigten logarithmischen Spirale in der x, y-Ebene beginnen, berühren die Brennfläche längs einer konischen Spirale, deren Projektion in die x, y-Ebene der Ausgangskurve ähnlich ist.

2. Ist die Bodenfläche eine Rotationsfläche, so liegen die ersten Brennpunkte auf der z-Achse, die zweiten auf einer Rotationsfläche, im besondern auf einem Kegel, wenn die Rotationsfläche ein Kegel ist; in diesem Falle ist die Hülle aller Feldkurven, die von einer logarithmischen Spirale ausgehen, eine Kurve derselben Art.

3. Wenn die Bodenfläche eine Ebene in beliebiger Stellung $z = c (\cos\gamma\, x + \sin\gamma\, y - d)$ ist, so gehen nur von den Punkten (x_0, y_0, z_0) oder (r_0, ϑ_0, z_0) Extremalen aus, in denen $1 - c^2 \cos^2 (\vartheta_0 - \gamma) > 0$ ist. Auf der z-Axe liegt kein Brennpunkt.

II. Da $\Phi = y \sqrt{x'^2 + y'^2} + \lambda\, (-z' + \sqrt{x'^2 + y'^2})$ zu setzen ist, so lauten der Transversalitätsbedingung zufolge 1. die Gleichungen des Feldes mit der Bodenfläche $f(x, y, z) = 0$ in Parameterdarstellung:

$$x = x_0 + a \cdot y_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} (t - t_0),$$
$$y = a \cdot y_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \operatorname{Cos} t + \frac{\partial f}{\partial z_0} \right),$$
$$z = z_0 + a\, y_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} (\operatorname{Sin} t - \operatorname{Sin} t_0)$$

mit den Definitionen von t_0 und a

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} \operatorname{Sin} t_0 - \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0; \quad \frac{1}{a} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \operatorname{Cos} t_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0}.$$

2. Ist die Bodenfläche eine Ebene, so enthält jede Extremale einen Brennpunkt. Der Ort dieser Punkte ist eine Ebene.

Lebenslauf.

Ich, Gertrud Weyl, geboren den 15. September 1895 zu Breslau als Tochter des prakt. Arztes Dr. Eduard Weyl, besuchte das Lyzeum und das Oberlyzeum und erlangte das Zeugnis der Lehrbefähigung für höhere Mädchenschulen. Ostern 1915 wurde ich auf Grund dieses Zeugnisses an der Universität zu Breslau rite immatrikuliert und studierte Mathematik und Naturwissenschaften. Durch Beschluß der Philosophischen Fakultät wurde mir 1920 die Bewerbung um den Doktortitel gestattet.